

# ЗМІСТ

|                                    |    |
|------------------------------------|----|
| Передмова до першого видання ..... | 9  |
| Передмова до другого видання ..... | 11 |

## Частина I. ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Розділ 1. Основні поняття теорії імовірностей та комбінаторики .....</b>            | <b>15</b> |
| 1.1. Предмет теорії імовірностей .....   | 15        |
| 1.2. Коротка історична довідка .....   | 16        |
| 1.3. Алгебра випадкових подій .....  | 17        |
| 1.4. Означення та властивості імовірності та частоти .....                             | 22        |
| 1.5. Основні поняття та принципи комбінаторики .....                                   | 26        |
| <i>Питання для самоперевірки та вправи .....</i>                                       | <i>31</i> |
| <b>Розділ 2. Основні теореми теорії імовірностей .....</b>                             | <b>38</b> |
| 2.1. Додавання імовірностей несумісних подій .....                                     | 38        |
| 2.2. Залежні та незалежні події, умовні імовірності .....                              | 40        |
| 2.3. Множення імовірностей .....   | 41        |
| 2.4. Імовірність появи хоча б однієї випадкової події .....                            | 44        |
| 2.5. Теорема додавання імовірностей сумісних подій .....                               | 45        |
| 2.6. Надійність системи .....  | 46        |
| 2.7. Формули повної імовірності та Байеса .....  | 48        |
| <i>Питання для самоперевірки та вправи .....</i>                                       | <i>52</i> |
| <b>Розділ 3. Послідовності випробувань .....</b>                                       | <b>61</b> |
| 3.1. Схема та формула Бернуллі .....   | 61        |
| 3.2. Граничні теореми у схемі Бернуллі .....   | 65        |
| 3.3. Послідовність випробувань із різними імовірностями .....                          | 70        |
| 3.4. Теорема Бернуллі .....  | 72        |
| 3.5. Проста течія подій .....  | 75        |
| <i>Питання для самоперевірки та вправи .....</i>                                       | <i>77</i> |
| <b>Розділ 4. Випадкові величини .....</b>  | <b>83</b> |
| 4.1. Види випадкових величин та способи їх задання .....                               | 83        |
| 4.2. Закони розподілу та числові характеристики дискретних<br>випадкових величин ..... | 89        |
| 4.2.1. Способи задання та закони розподілу .....                                       | 89        |

|   |     |
|---|-----|
| 4.2.2. Числові характеристики .....   | 93  |
| 4.3. Числові характеристики законів розподілу неперервних випадкових величин .....                | 102 |
| 4.3.1. Числові характеристики неперервних випадкових величин ....                                 | 102 |
| 4.3.2. Закони розподілу НВВ та їх числові характеристики .....                                    | 105 |
| 4.4. Закон великих чисел та центральна гранична теорема .....                                     | 113 |
| 4.4.1. Загальні поняття .....   | 113 |
| 4.4.2. Нерівність Чебишова .....  | 114 |
| 4.4.3. Важливі граничні теореми .....   | 116 |
| 4.5. Закони розподілу та числові характеристики двовимірних випадкових величин .....              | 120 |
| 4.5.1. Загальні поняття .....   | 120 |
| 4.5.2. Закон розподілу імовірностей дискретної двовимірної випадкової величини .....              | 121 |
| 4.5.3. Неперервна двовимірна випадкова величина .....   | 125 |
| 4.5.4. Залежні та незалежні випадкові величини .....  | 126 |
| 4.5.5. Числові характеристики двовимірної випадкової величини ...                                 | 126 |
| 4.6. Функції випадкової величини та їх характеристики .....                                       | 128 |
| 4.6.1. Поняття функції .....  | 128 |
| 4.6.2. Закон розподілу та числові характеристики функції дискретного випадкового аргументу .....  | 129 |
| 4.6.3. Закон розподілу та числові характеристики функції неперервного випадкового аргументу ..... | 130 |
| <i>Питання для самоперевірки та вправи</i> .....  | 134 |

## Частина II. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

|   |            |
|---|------------|
| <b>Розділ 5. Основні поняття та статистичний розподіл .....</b>                     | <b>153</b> |
| 5.1. Предмет математичної статистики та коротка історична довідка ....              | 153        |
| 5.2. Генеральна та вибіркова сукупності .....                                       | 154        |
| 5.3. Джерела даних у статистиці .....   | 156        |
| 5.4. Способи відбору .....  | 159        |
| 5.5. Проста випадкова вибірка .....   | 160        |
| 5.5.1. Умови здійснення простої випадкової вибірки .....                            | 160        |
| 5.5.2. Випадкові вибіркові числа .....  | 161        |
| 5.5.3. Здійснення простої випадкової вибірки з використанням випадкових чисел ..... | 162        |
| 5.6. Організація даних: статистичний розподіл вибірки .....                         | 165        |
| 5.6.1. Впорядкування даних .....  | 165        |
| 5.6.2. Розподіл частот .....  | 166        |
| 5.6.3. Згрупований розподіл накопиченої частоти .....                               | 170        |

|  |            |
|--|------------|
| 5.6.4. Розподіл відносної частоти (частоті) вибірки .....                                      | 171        |
| 5.6.5. Ряди розподілу частоти із змінною шириною класів<br>інтервалів .....                    | 173        |
| 5.6.6. Згрупований розподіл щільності частоти і щільності відносної<br>частоти (частоті) ..... | 174        |
| 5.6.7. Загальна схема побудови згрупованого розподілу частот .....                             | 175        |
| 5.7. Емпірична функція розподілу та її властивості .....                                       | 176        |
| 5.8. Графічне зображення статистичних розподілів .....   | 179        |
| 5.8.1. Незгруповані дані: полігони частот та частостей, гістограма .....                       | 179        |
| 5.8.2. Згруповані дані: гістограма і полігон частот .....                                      | 188        |
| 5.8.3. Імовірнісний зміст гістограми та полігону частот .....                                  | 193        |
| 5.8.4. Полігони накопичених частот та частостей. Знаходження<br>їх медіани .....               | 194        |
| 5.8.5. Графік емпіричної функції розподілу .....   | 197        |
| <i>Питання для самоперевірки та вправи</i> .....   | 200        |
| <b>Розділ 6. Статистичні оцінки параметрів розподілу .....</b>                                 | <b>203</b> |
| 6.1. Основні вимоги до статистичних оцінок .....   | 203        |
| 6.2. Числові характеристики вибіркової сукупності .....  | 206        |
| 6.2.1. Вибіркові характеристики .....  | 206        |
| 6.2.2. Обчислення вибіркових характеристик методом добутків .....                              | 210        |
| 6.2.3. Статистичні моменти розподілу .....   | 213        |
| 6.2.4. Приклади знаходження статистик вибірки .....  | 214        |
| 6.3. Точкові та інтервальні оцінки .....   | 218        |
| 6.3.1. Загальні поняття .....  | 218        |
| 6.3.2. Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання<br>нормального розподілу .....    | 219        |
| 6.4. Обробка вибірки методом найменших квадратів .....   | 223        |
| 6.4.1. Основні поняття .....   | 223        |
| 6.4.2. Оцінка параметрів лінійної функції .....  | 224        |
| 6.4.3. Оцінка параметрів параболічної функціональної залежності ....                           | 226        |
| <i>Питання для самоперевірки та вправи</i> .....   | 229        |
| <b>Розділ 7. Статистична перевірка гіпотез .....</b>   | <b>233</b> |
| 7.1. Статистичні гіпотези та їх різновиди .....  | 233        |
| 7.2. Похибки перевірки гіпотез .....   | 235        |
| 7.3. Критерії узгодження для перевірки гіпотез .....   | 236        |
| 7.3.1. Статистичний критерій перевірки основної гіпотези .....                                 | 236        |
| 7.3.2. Критична область .....  | 237        |
| 7.3.3. Знаходження критичних областей .....  | 238        |
| 7.3.4. Порядок дій при перевірці статистичних гіпотез .....                                    | 239        |

|   |     |
|---|-----|
| 7.4. Деякі критерії перевірки статистичних гіпотез .....  | 240 |
| 7.4.1. Перевірка гіпотези про рівність математичних сподівань<br>нормальних генеральних сукупностей ..... | 240 |
| 7.4.2. Критерій дисперсійного аналізу .....   | 242 |
| 7.4.3. Критерій узгодження Пірсона ( $\chi^2$ ) .....   | 244 |
| <i>Питання для самоперевірки та вправи</i> .....  | 248 |

## Частина III. КОМП'ЮТЕРНИЙ АНАЛІЗ

|  |            |
|--|------------|
| <b>Розділ 8. Розв'язання задач засобами Excel .....</b>  | <b>253</b> |
| 8.1. Комп'ютерне розв'язання задач теорії імовірностей та математичної<br>статистики у бізнесі ..... | 253        |
| 8.1.1. Огляд основних задач, що вирішені за допомогою Excel .....                                    | 253        |
| 8.1.2. Електронна таблиця Excel: елементи вікна та умовні скорочення ....                            | 255        |
| 8.1.3. Статистичні функції Excel .....   | 258        |
| 8.2. Здійснення простої випадкової вибірки за допомогою функції<br>«Виборка» .....                   | 261        |
| <i>Вправи для самостійної роботи</i> .....   | 266        |
| 8.3. Організація даних вибіркової сукупності .....   | 267        |
| 8.3.1. Побудова варіаційного ряду .....  | 267        |
| 8.3.2. Побудова розподілів частот за допомогою функції ЧАСТОТА ....                                  | 269        |
| 8.3.3. Побудова розподілів частот та накопичених частот і частостей ....                             | 277        |
| <i>Вправи для самостійної роботи</i> .....   | 282        |
| 8.4. Графічне представлення розподілів вибіркової сукупності .....                                   | 285        |
| 8.4.1. Графічне представлення розподілів за допомогою функції<br>«Гистограма» .....                  | 285        |
| 8.4.2. Графічне представлення розподілів за допомогою «Мастера<br>діаграмм» .....                    | 298        |
| <i>Вправи для самостійної роботи</i> .....   | 311        |
| 8.5. Знаходження числових характеристик вибірових даних .....  | 313        |
| 8.5.1. Знаходження числових характеристик за допомогою статистичних<br>функцій .....                 | 313        |
| 8.5.2. Знаходження числових характеристик вибірки у вигляді<br>згрупованого розподілу частоти .....  | 318        |
| <i>Вправи для самостійної роботи</i> .....   | 329        |
| 8.6. Комбінаторика .....   | 331        |
| 8.6.1. Обчислення факторіалу числа за допомогою функції ФАКТР ....                                   | 331        |
| 8.6.2. Обчислення сполучень за допомогою функції ЧИСЛОКОМБ ....                                      | 333        |
| 8.6.3. Обчислення розміщень за допомогою функції ПЕРЕСТ .....  | 335        |

|  |            |
|--|------------|
| 8.7. Обчислення, пов'язані з законами розподілу випадкових величин ....            | 337        |
| 8.7.1. Біноміальний розподіл .....   | 337        |
| 8.7.2. Розподіл Пуассона .....   | 343        |
| 8.7.3. Нормальний розподіл .....   | 346        |
| 8.8. Побудова довірчого інтервалу для оцінки математичного сподівання ..           | 355        |
| 8.9. Алгоритми Excel корисні в статистичних обчисленнях .....                      | 358        |
| 8.9.1. Введення даних у таблиці Excel .....  | 358        |
| 8.9.2. Редагування графіків за допомогою майстра діаграм .....                     | 363        |
| 8.9.3. Виведення цифрових даних із заданою точністю .....                          | 379        |
| 8.10. Висновки .....   | 381        |
| <b>Додатки .....</b>   | <b>383</b> |
| Д.1. Завдання для контролю навичок розв'язування задач з теорії імовірностей ..... | 383        |
| Д.2. Завдання для індивідуальної семестрової роботи .....                          | 389        |
| Д.3. Тест для перевірки знань та навичок .....                                     | 391        |
| Д.4. Таблиці .....   | 406        |
| Значення функції $e^{-x}$ .....  | 406        |
| Значення локальної функції Лапласа .....   | 408        |
| Значення інтегральної функції Лапласа .....  | 411        |
| Розподіл Пуассона .....  | 411        |
| Значення критерію Пірсона ( $\chi^2$ ) .....                                       | 414        |
| Критичні точки розподілу Стьюдента .....   | 415        |
| Критичні точки розподілу Фішера-Снедекора .....                                    | 417        |
| 2220 випадкових чисел .....  | 419        |
| <b>Список літератури .....</b>   | <b>421</b> |



## Передмова до першого видання

Теорія імовірностей та математична статистика — самостійні математичні науки, які є теоретичною основою викладання багатьох економічних, соціологічних та спеціальних дисциплін, вони використовуються в багатьох галузях науки та техніки, а також розумними бізнесменами та керівниками різного рівня.

Тому ці теорії становлять обов'язкову частину математичного циклу дисциплін усіх економічних вищих навчальних закладів.

Більшість наявних підручників з теорії імовірностей та математичної статистики призначено для студентів вищих технічних навчальних закладів або математичних та фізичних спеціальностей університетів. Вони розраховані на досить велику кількість учбових годин та високий рівень знань та навичок студентів не тільки елементарної математики, але й вищої математики, включаючи інтегрування функцій багатьох змінних.

Мета цього навчального посібника — ознайомити студентів економічних вищих навчальних закладів (а також усіх зацікавлених фахівців) з основними поняттями, методами, теоремами та формулами теорії імовірностей та математичної статистики, допомогти їм набути первинні навички застосування теоретичного матеріалу в багатьох випадках.

Посібник розроблено відповідно типової учбової програми дисципліни «Теорія імовірностей та математична статистика», затвердженої Міністерством освіти України для економічних вищих навчальних закладів. Він містить багато розв'язаних прикладів, завдань для самостійної роботи студентів та поточного контролю якості одержаних знань та навичок, необхідні таблиці, зразки планової контрольної роботи, комплексного семестрового завдання та тести перевірки остаточних знань студентів.

Розподіл матеріалу на частини, розділи та підрозділи дозволяє виділяти головне і зосереджує на ньому увагу читача.

Нумерацію формул, теорем, прикладів виконано окремо для кожного підрозділу для зручності читача.

Автори звертають увагу читача на те, що вивчати матеріал цього посібника треба послідовно з обов'язковим розв'язуванням

задач: вправи доцільно виконувати після ознайомлення з теоретичним матеріалом та прикладами, наведеними у навчальному посібнику.

Автори впевнені, що посібник буде корисним не тільки студентам економічних вищих навчальних закладів стаціонарної та заочної форм навчання, але й фінансистам, актуаріям, керівникам різного рівня, бізнесменам, співробітникам податкової інспекції та страхових компаній, соціологам та політологам.



## Передмова до другого видання

В друге видання додана третя частина «Комп'ютерний аналіз» та розширені розділи 5 та 6. Мета включення Частини III у підручник полягає у побудові основ сучасного мислення фахівця у галузі бізнесу та управління.

У цій частині засобами Excel повністю вирішені наступні важливі задачі теорії імовірності та математичної статистики:

- побудова простої випадкової вибірки заданого об'єму по заданій скінченій вибірці;
- впорядкування і організація даних у вигляді розподілів частот, накопичених частот і т.д.;
- подання отриманих розподілів у графічному вигляді — гістограм, полігонів частот і т.д.;
- обчислення числових характеристик вибірки — середнього значення, дисперсії і середнє квадратичного відхилення;
- обчислення, пов'язані з комбінаторикою;
- обчислення, пов'язані з біноміальним розподілом, розподілом Пуассона, нормальним розподілом;
- побудова довірчого інтервалу для оцінки математичного сподівання нормального розподілу.

Окремо розглянуто алгоритми Excel, які корисні в статистичних обчисленнях: введення даних, редагування графіків за допомогою майстра діаграм, оформлення результатів та підготовка до друку.

Засвоєння цього матеріалу надзвичайно важливо для розуміння всього курсу теорії імовірності та математичної статистики. У той же час, саме розглянуті задачі є найбільш трудомісткими через велику кількість обчислень.

Вибір електронної таблиці Excel (пакет Microsoft Office 2003, Windows XP, русифікована версія) зумовлено тим, що вона широко поширена і, отже, доступна. Excel має дружній інтерфейс. Це означає, що потужні засоби Excel використовувати легко та просто. Excel доступний для початківця і цілком задовольнить професіонала.

Як показує досвід Національної академії управління, засвоєння студентом практичних навиків використання комп'ютерів сприяє

більш глибокому засвоєнню теорії і надає студентові найбільш сучасні і потужні засоби вирішення будь-яких складних задач теорії імовірностей та математичної статистики у бізнесі або в соціологічних дослідженнях.

***Викладання матеріалу у цій частині розраховано на те, щоб кожний бажачий міг засвоїти ці алгоритми самостійно.***

Всі алгоритми викладені дуже детально. Наприкінці параграфів, що розглядають первинну обробку даних, наведено вправи для самостійного виконання. Необхідною умовою для засвоєння алгоритмів є доступ до комп'ютера, де встановлено Excel, та послідовне і самостійне виконання всіх алгоритмів, що наведені у тексті.

Автори виражають щире подяку викладачам кафедри комп'ютерної техніки та програмування Національної академії управління, зокрема завідувачу кафедрою доценту, к.т.н. В.В.Кривцову, доценту, к.т.н. В.П.Корневу, викладачу В.Й.Ніколайчуку, за обговорення роботи і цінні зауваження, які були враховані при підготовці рукопису.

В текст другого видання були внесені деякі уточнення і виправлення. Автори вдячні всім читачам, що висловили свої побажання та зауваження.