

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Ю. Г. Козак, В. М. Мацкул

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ  
ТА МОДЕЛІ ДЛЯ МАГІСТРІВ  
З ЕКОНОМІКИ

ПРАКТИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

*Рекомендовано  
Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів  
вищих навчальних закладів*

Київ  
«Центр учбової літератури»  
2017

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Ю. Г. Козак, В. М. Мацкул

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ  
ТА МОДЕЛІ ДЛЯ МАГІСТРІВ  
З ЕКОНОМІКИ

ПРАКТИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

*Рекомендовано  
Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів  
вищих навчальних закладів*

Київ  
«Центр учбової літератури»  
2017

УДК 330.4(075.8)  
ББК 65.050я73  
К 59

**Рецензенти:**

**С. А. Єрохін** – доктор економічних наук, професор, ректор ВНЗ «Національна академія управління»;

**С. О. Якубовський** – доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри світового господарства і міжнародних економічних відносин Одеського національного університету;

**О. Г. Янковий** – доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри економіки підприємства Одеського національного економічного університету.

**Козак Ю. Г.** Математичні методи та моделі для магістрів з економіки.  
**К 59** Практичні застосування. [текст] Навч. посіб. / Ю. Г. Козак, В. М. Мащук. – К.: Центр учбової літератури, 2017. – 254 с.

**ISBN 978-617-673-488-8**

Розглядаються математичні методи та моделі, які застосовуються у різноманітних сферах економіки (як на мікро, так і на макрорівнях). Наводяться приклади розбудови та аналізу математичних моделей для достатньо широкого кола прикладних задач економічного аналізу. Проведення числових розрахунків зорієнтовано на застосування сучасних ІТ технологій.

Магістрантам з економіки та науковцям, які займаються дослідженнями економічних явищ та процесів.

УДК 330.4(075.8)  
ББК 65.050я73

ISBN 978-617-673-488-8

© Козак Ю. Г., Мащук В. М., 2017.  
© Видавництво «Центр учбової літератури», 2017.

УДК 330.4(075.8)  
ББК 65.050я73  
К 59

**Рецензенти:**

**С. А. Єрохін** – доктор економічних наук, професор, ректор ВНЗ «Національна академія управління»;

**С. О. Якубовський** – доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри світового господарства і міжнародних економічних відносин Одеського національного університету;

**О. Г. Янковий** – доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри економіки підприємства Одеського національного економічного університету.

**Козак Ю. Г.** Математичні методи та моделі для магістрів з економіки.  
**К 59** Практичні застосування. [текст] Навч. посіб. / Ю. Г. Козак, В. М. Мащук. – К.: Центр учбової літератури, 2017. – 254 с.

**ISBN 978-617-673-488-8**

Розглядаються математичні методи та моделі, які застосовуються у різноманітних сферах економіки (як на мікро, так і на макрорівнях). Наводяться приклади розбудови та аналізу математичних моделей для достатньо широкого кола прикладних задач економічного аналізу. Проведення числових розрахунків зорієнтовано на застосування сучасних ІТ технологій.

Магістрантам з економіки та науковцям, які займаються дослідженнями економічних явищ та процесів.

УДК 330.4(075.8)  
ББК 65.050я73

ISBN 978-617-673-488-8

© Козак Ю. Г., Мащук В. М., 2017.  
© Видавництво «Центр учбової літератури», 2017.

Передмова.....	5
<b>Розділ 1. Основи математичного моделювання та прогнозування.....</b>	<b>8</b>
1.1. Логіка прикладного економіко-математичного моделювання. Економічні дані (інформаційна база моделі). ....	8
1.2. Розвідувальний аналіз даних за допомогою комп'ютерних технологій. Однорідність та типологія. Багатовимірне ранжування. Метод експертних оцінок.....	10
1.3. Сутність та види прогнозів.....	25
<b>Розділ 2. Методи та моделі багатовимірного факторного аналізу..</b>	<b>28</b>
2.1. Кластерні процедури класифікації. Дискримінантний аналіз. ....	28
2.2. Факторний аналіз. Метод головних компонент. Узагальнений метод головних компонент (пакетний PLS/PCA-R, SPC).....	61
<b>Розділ 3. Моделювання та прогнозування динаміки економічних процесів.....</b>	<b>74</b>
3.1. Основи моделювання динаміки.....	74
3.2. Основні типи трендів. Короткострокове прогнозування на основі ковзних середніх.....	78
3.3. Оцінювання сезонної компоненти. Моделі Холта-Вінтера та CENSUS X-II.....	82
3.4. Моделі авторегресії AR, ARIMA*ARIMAS, ARCH, GARCH. Динамічні факторні моделі DFM та DFMS (із марківськими перемиканнями). Фільтр Калмана. Векторні авторегресії VAR.....	85
<b>Розділ 4. Особливі випадки регресійного аналізу .....</b>	<b>130</b>
4.1. Нелінійна регресія, особливості аналізу панельних (просторово-часових) даних. Моделювання причинних комплексів (системи структурних регресій).....	130
4.2. Моделювання причинних комплексів (системи структурних регресій). Проекція на латентну структуру. Методи PLS-PM/PCA-PM. Логіт-регресія МакФаддена .....	139
<b>Розділ 5. Динамічні оптимізаційні моделі.....</b>	<b>160</b>
5.1. Модель Ерроу-Дебре. Прикладні моделі обчислюваної загальної рівноваги (CGE – computable general equilibrium) та динамічної рівноваги DSGE.....	160
5.2. Застосування моделей CGE, DSGE.....	167
5.3. Динамічна задача оптимального управління пакетом виробничих інвестицій.....	187

Передмова.....	5
<b>Розділ 1. Основи математичного моделювання та прогнозування.....</b>	<b>8</b>
1.1. Логіка прикладного економіко-математичного моделювання. Економічні дані (інформаційна база моделі). ....	8
1.2. Розвідувальний аналіз даних за допомогою комп'ютерних технологій. Однорідність та типологія. Багатовимірне ранжування. Метод експертних оцінок.....	10
1.3. Сутність та види прогнозів.....	25
<b>Розділ 2. Методи та моделі багатовимірного факторного аналізу..</b>	<b>28</b>
2.1. Кластерні процедури класифікації. Дискримінантний аналіз. ....	28
2.2. Факторний аналіз. Метод головних компонент. Узагальнений метод головних компонент (пакетний PLS/PCA-R, SPC).....	61
<b>Розділ 3. Моделювання та прогнозування динаміки економічних процесів.....</b>	<b>74</b>
3.1. Основи моделювання динаміки.....	74
3.2. Основні типи трендів. Короткострокове прогнозування на основі ковзних середніх.....	78
3.3. Оцінювання сезонної компоненти. Моделі Холта-Вінтера та CENSUS X-II.....	82
3.4. Моделі авторегресії AR, ARIMA*ARIMAS, ARCH, GARCH. Динамічні факторні моделі DFM та DFMS (із марківськими перемиканнями). Фільтр Калмана. Векторні авторегресії VAR.....	85
<b>Розділ 4. Особливі випадки регресійного аналізу .....</b>	<b>130</b>
4.1. Нелінійна регресія, особливості аналізу панельних (просторово-часових) даних. Моделювання причинних комплексів (системи структурних регресій).....	130
4.2. Моделювання причинних комплексів (системи структурних регресій). Проекція на латентну структуру. Методи PLS-PM/PCA-PM. Логіт-регресія МакФаддена .....	139
<b>Розділ 5. Динамічні оптимізаційні моделі.....</b>	<b>160</b>
5.1. Модель Ерроу-Дебре. Прикладні моделі обчислюваної загальної рівноваги (CGE – computable general equilibrium) та динамічної рівноваги DSGE.....	160
5.2. Застосування моделей CGE, DSGE.....	167
5.3. Динамічна задача оптимального управління пакетом виробничих інвестицій.....	187

Розділ 6. Моделювання за допомогою нейронних мереж	
<b>Імітаційне моделювання</b> .....	195
6.1. Загальні принципи нейромережевого моделювання.	
Приклади.....	195
6.2. Системна динаміка та імітаційне моделювання. Приклади.....	213
Література.....	249

Розділ 6. Моделювання за допомогою нейронних мереж	
<b>Імітаційне моделювання</b> .....	195
6.1. Загальні принципи нейромережевого моделювання.	
Приклади.....	195
6.2. Системна динаміка та імітаційне моделювання. Приклади.....	213
Література.....	249

Останнім часом моделювання стало найефективнішим засобом пізнання законів і закономірностей навколишнього світу. Для сучасної математики характерне інтенсивне проникнення в інші галузі знань, зокрема, і в економічні науки. Економіка, як наука про об'єктивні закони розвитку суспільства, постійно користується різноманітними кількісними характеристиками, і тому вона акумулювала в собі низку математичних методів. А активність економічних досліджень стає рушійною силою для математиків у подальшому розвитку математичного інструментарію. Сьогодні в економічній науці на провідні позиції виходить математична модель як дієвий інструмент дослідження та прогнозування розвитку економічних процесів і явищ.

Математична модель - це внутрішньо замкнута система математичних співвідношень, яка є дієвим інструментом відтворення певного класу якісних або кількісних функціональних характеристик, властивих економічному процесу чи явищу, що вивчається. Тому для визначення характерних особливостей класу математичних моделей, які застосовуються в економіці, використовується термін «економіко-математичне моделювання». Можна стверджувати, що економіко-математичне моделювання за останні десятиліття сформувалося в окрему міждисциплінарну область знань із властивими їй об'єктами, підходами та методами дослідження.

Економіко-математичне моделювання полягає у заміні реального економічного об'єкта або процесу математичною конструкцією, яка відтворює основні, найістотніші (із позиції дослідника) риси досліджуваного явища або процесу, абстрагуючись від неістотних. Економіко-математичні моделі використовують для діагностики стану об'єктів, при вивченні масових соціально-економічних явищ та процесів, закономірності яких формуються під впливом багатьох факторів, у моніторингу економічної кон'юнктури, при прогнозуванні та прийнятті науково обгрунтованих управлінських рішень. Тому надзвичайно актуальним постає завдання підготовки спеціалістів-аналітиків, і саме тому до навчальних програм підготовки магістрів з економіки включено обов'язковий блок дисциплін «Економіко-математичне моделювання». Даний блок, очевидно, поєднує теорію трьох дисциплін – економіки, математики та інформатики. Зрозуміло, що економіко-математичне моделювання як методологія та інструментарій у жодному разі не заперечує згадані дисципліни і не конкурує з ними, а, навпаки, синтезує та доповнює їх. Тому кваліфікований аналітик, який використовує методи математичного моделювання у повсякденній практиці, певною мірою повинен бути:

а) економістом – щоб використовувати економічну теорію для аналізу емпіричних даних;

Останнім часом моделювання стало найефективнішим засобом пізнання законів і закономірностей навколишнього світу. Для сучасної математики характерне інтенсивне проникнення в інші галузі знань, зокрема, і в економічні науки. Економіка, як наука про об'єктивні закони розвитку суспільства, постійно користується різноманітними кількісними характеристиками, і тому вона акумулювала в собі низку математичних методів. А активність економічних досліджень стає рушійною силою для математиків у подальшому розвитку математичного інструментарію. Сьогодні в економічній науці на провідні позиції виходить математична модель як дієвий інструмент дослідження та прогнозування розвитку економічних процесів і явищ.

Математична модель - це внутрішньо замкнута система математичних співвідношень, яка є дієвим інструментом відтворення певного класу якісних або кількісних функціональних характеристик, властивих економічному процесу чи явищу, що вивчається. Тому для визначення характерних особливостей класу математичних моделей, які застосовуються в економіці, використовується термін «економіко-математичне моделювання». Можна стверджувати, що економіко-математичне моделювання за останні десятиліття сформувалося в окрему міждисциплінарну область знань із властивими їй об'єктами, підходами та методами дослідження.

Економіко-математичне моделювання полягає у заміні реального економічного об'єкта або процесу математичною конструкцією, яка відтворює основні, найістотніші (із позиції дослідника) риси досліджуваного явища або процесу, абстрагуючись від неістотних. Економіко-математичні моделі використовують для діагностики стану об'єктів, при вивченні масових соціально-економічних явищ та процесів, закономірності яких формуються під впливом багатьох факторів, у моніторингу економічної кон'юнктури, при прогнозуванні та прийнятті науково обгрунтованих управлінських рішень. Тому надзвичайно актуальним постає завдання підготовки спеціалістів-аналітиків, і саме тому до навчальних програм підготовки магістрів з економіки включено обов'язковий блок дисциплін «Економіко-математичне моделювання». Даний блок, очевидно, поєднує теорію трьох дисциплін – економіки, математики та інформатики. Зрозуміло, що економіко-математичне моделювання як методологія та інструментарій у жодному разі не заперечує згадані дисципліни і не конкурує з ними, а, навпаки, синтезує та доповнює їх. Тому кваліфікований аналітик, який використовує методи математичного моделювання у повсякденній практиці, певною мірою повинен бути:

а) економістом – щоб використовувати економічну теорію для аналізу емпіричних даних;

б) математиком – щоб формулювати економічну теорію засобами математичної мови, зробивши її придатною для побудови формалізованих схем та перевірки їх коректності (адекватності емпіричним даним);

в) спеціалістом у економічній статистиці – щоб володіти процесами формування інформаційної бази даних і вміти порівнювати у відповідності до економічної теорії реально виміряні макро- та мікроекономічні емпіричні показники;

г) спеціалістом в математичній статистиці – щоб використовувати для аналізу емпіричних даних кількісні методи;

д) спеціалістом із сучасних ІТ технологій – щоб використовувати комп'ютерну техніку та необхідні програмні продукти, без застосування яких сьогодні немислимий системний аналіз.

Отже, можна констатувати, що:

1. Економіка (як будь-яка теоретична наука) в якості інструментарію своїх досліджень використовує моделі, формалізованою мовою опису яких є математика. А наявний апарат математичних методів дає змогу знайти чисельні розв'язки побудованих моделей, зпрогнозувати можливі сценарії розвитку, виконати імітаційні розрахунки.

2. Науково-дослідницькі розробки економічних проблем неможливі без використання досить складного й одночасно доступного математичного інструментарію. Інакше ці розробки будуть мати описовий характер або ж будуть звичайною економічною публіцистикою.

Перше твердження покликане захищати економіку (особливо економічні дисципліни) від насильницького наповнення їх абстрактним математичним апаратом. А друга теза відображає реальні вимоги до наукових досліджень у галузі економіки, загальноприйняті у всьому світі. Свідченням цього є факт, що більшість лауреатів Нобелівської премії з економіки, якою з 1969 року відзначають досягнення вчених-економістів, отримали це високе звання саме за активне використання та розвиток математичних методів і моделей. Міжнародна практика свідчить про високу ефективність застосування математичних методів при розв'язанні задач різних рівнів і напрямків економічного розвитку, при дослідженні механізмів функціонування фінансової, банківської та інших систем. А сам процес моделювання здійснюється за допомогою різноманітних спеціалізованих комп'ютерних програм.

Більшість світових університетів до навчальних планів підготовки магістрів з економіки включають дисципліни Мікро-, Макроекономіка, Економетрика I, II, III, в яких широко застосовуються економіко-математичне моделювання. Але програми цих дисциплін (як показує багаторічний авторський досвід викладання таких курсів) перенасичені досить складним математичним апаратом, який сприймається лише поодинокими магістрантами-економістами. Саме тому автори даного посібника поставили

б) математиком – щоб формулювати економічну теорію засобами математичної мови, зробивши її придатною для побудови формалізованих схем та перевірки їх коректності (адекватності емпіричним даним);

в) спеціалістом у економічній статистиці – щоб володіти процесами формування інформаційної бази даних і вміти порівнювати у відповідності до економічної теорії реально виміряні макро- та мікроекономічні емпіричні показники;

г) спеціалістом в математичній статистиці – щоб використовувати для аналізу емпіричних даних кількісні методи;

д) спеціалістом із сучасних ІТ технологій – щоб використовувати комп'ютерну техніку та необхідні програмні продукти, без застосування яких сьогодні немислимий системний аналіз.

Отже, можна констатувати, що:

1. Економіка (як будь-яка теоретична наука) в якості інструментарію своїх досліджень використовує моделі, формалізованою мовою опису яких є математика. А наявний апарат математичних методів дає змогу знайти чисельні розв'язки побудованих моделей, зпрогнозувати можливі сценарії розвитку, виконати імітаційні розрахунки.

2. Науково-дослідницькі розробки економічних проблем неможливі без використання досить складного й одночасно доступного математичного інструментарію. Інакше ці розробки будуть мати описовий характер або ж будуть звичайною економічною публіцистикою.

Перше твердження покликане захищати економіку (особливо економічні дисципліни) від насильницького наповнення їх абстрактним математичним апаратом. А друга теза відображає реальні вимоги до наукових досліджень у галузі економіки, загальноприйняті у всьому світі. Свідченням цього є факт, що більшість лауреатів Нобелівської премії з економіки, якою з 1969 року відзначають досягнення вчених-економістів, отримали це високе звання саме за активне використання та розвиток математичних методів і моделей. Міжнародна практика свідчить про високу ефективність застосування математичних методів при розв'язанні задач різних рівнів і напрямків економічного розвитку, при дослідженні механізмів функціонування фінансової, банківської та інших систем. А сам процес моделювання здійснюється за допомогою різноманітних спеціалізованих комп'ютерних програм.

Більшість світових університетів до навчальних планів підготовки магістрів з економіки включають дисципліни Мікро-, Макроекономіка, Економетрика I, II, III, в яких широко застосовуються економіко-математичне моделювання. Але програми цих дисциплін (як показує багаторічний авторський досвід викладання таких курсів) перенасичені досить складним математичним апаратом, який сприймається лише поодинокими магістрантами-економістами. Саме тому автори даного посібника поставили

собі за мету ознайомити читача із якомога більшим класом сучасних математичних методів та моделей економіки і, головне, надати економісту-досліднику практичних навичок із застосування сучасних ІТ технологій для економіко-математичного моделювання.

На завершення автори вважають своїм обов'язком висловити щиру вдячність рецензентам, а також студенту ОНЕУ Віктору Козакову за допомогу у створенні даного посібника.

собі за мету ознайомити читача із якомога більшим класом сучасних математичних методів та моделей економіки і, головне, надати економісту-досліднику практичних навичок із застосування сучасних ІТ технологій для економіко-математичного моделювання.

На завершення автори вважають своїм обов'язком висловити щиру вдячність рецензентам, а також студенту ОНЕУ Віктору Козакову за допомогу у створенні даного посібника.